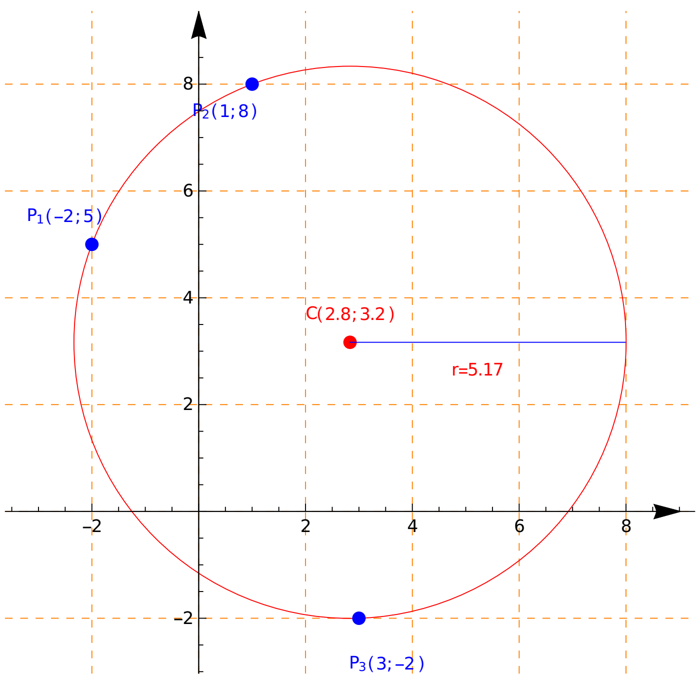
Equazione della circonferenza passante per i seguenti 3 punti:

$(-2;5)$ $(1;8)$ $(3;-2)$

c) $3x^2+3y^2-17x-19y-26=0$

* Grafico *



* Metodi per determinare l'equazione della circonferenza *

Si possono utilizzare 2 metodi:

1) Metodo geometrico:

a) Si determinano gli assi di due corde e si intersecano per determinare il centro della circonferenza

b) Si calcola la distanza del centro così trovato da uno qualunque dei 3 punti dati e si determina così il raggio della circonferenza

c) Si applica la seguente formula per determinare l'equazione della circonferenza conoscendo centro e raggio

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

dove α e β sono le coordinate del centro e r è il raggio

1) Metodo algebrico:

a) Si imposta un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite
a, b, c che sono i coefficienti dell'equazione generica della circonferenza

$$x^2 + y^2 + \mathrm{a}\,x + \mathrm{b}\,y + \mathrm{c} = 0$$

b) Le 3 equazioni si ottengono imponendo la condizione di
appartenenza di ognuno dei 3 punti dati all'equazione generica della circonferenza

c) Si risolve il sistema così ottenuto e si sostituiscoo
i valori di a, b e c ottenuti nell'equazione generica della circonferenza

Quì di seguito ci sono gli svolgimenti dell'esercizio con entrambi i metodi

⁎ Metodo geometrico ⁎

Determinazione degli assi di 2 corde

Asse della corda $\overline{P_1P_2}$

$\overline{PP_1}^2 = \overline{PP_2}^2$

$(x-(-2))^2+(y-(5))^2=(x-(1))^2+(y-(8))^2$

$(x+2)^2+(y-5)^2=(x-1)^2+(y-8)^2$

$x^2+4x+y^2-10y+29=x^2-2x+y^2-16y+65$

$6x+6y-36=0$

Equazione finale dell'asse:

$x+y-6=0$

Asse della corda $\overline{P_2P_3}$

$\overline{PP_2}^2 = \overline{PP_3}^2$

$(x-(1))^2+(y-(8))^2=(x-(3))^2+(y-(-2))^2$

$(x-1)^2+(y-8)^2=(x-3)^2+(y+2)^2$

$x^2-2x+y^2-16y+65=x^2-6x+y^2+4y+13$

$4x-20y+52=0$

Equazione finale dell'asse:

$x - 5\,y + 13 = 0$

** Determinazione del centro come intersezione degli assi **

* Risoluzione del sistema col metodo di sostituzione *

Le equazioni vengono semplificate nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} x + y - 6 = 0 \\ x - 5\,y + 13 = 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

$$\begin{pmatrix} x + y - 6 = 0 \\ x - 5\,y + 13 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = 6 - y \\ 19 - 6\,y = 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = 6 - y \\ 19 - 6\,y = 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = 6 - y \\ y = \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = 6 - \left(\frac{19}{6} \right) \\ y = \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = \frac{17}{6} \\ y = \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = \frac{17}{6} \\ y = \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

Punto di intersezione

$\left(\frac{17}{6};\frac{19}{6}\right)$

⋆ Risoluzione del sistema col metodo di riduzione ⋆

Le equazioni vengono semplificate nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} x+y-6=0 \\ x-5\,y+13=0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

$$\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\begin{pmatrix} x+y=6 \\ x-5\,y=-13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y=6 \\ 5\,y-x=13 \end{pmatrix}$$
$$6\,y=19$$

$$\begin{pmatrix} x+y=6 \\ 6\,y=19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y=6 \\ y=\frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+\left(\frac{19}{6}\right)=6 \\ y=\frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x=\frac{17}{6} \\ y=\frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x=\frac{17}{6} \\ y=\frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

Punto di intersezione

$$\left(\frac{17}{6};\frac{19}{6}\right)$$

Determinazione del raggio come distanza tra il centro C e il punto P_1

$C\left(\frac{17}{6};\frac{19}{6}\right)$ $P_1(-2;5)$

Formula da applicare:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} =$$

$$\sqrt{\left((-2)-\left(\frac{17}{6}\right)\right)^2+\left((5)-\left(\frac{19}{6}\right)\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(-\frac{29}{6}\right)^2+\left(\frac{11}{6}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{841}{36}+\frac{121}{36}} =$$

$$\sqrt{\frac{481}{18}}$$

$$d = \frac{\sqrt{\frac{481}{2}}}{3}. \approx 5.169$$

Determinazione dell'equazione della circonferenza noti Centro e Raggio

$$\left(x-\left(\frac{17}{6}\right)\right)^2+\left(y-\left(\frac{19}{6}\right)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\frac{481}{2}}}{3}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{17}{6}\right)^2+\left(y-\frac{19}{6}\right)^2=\frac{481}{18}$$

$$\frac{1}{36}(6\,x-17)^2+\frac{1}{36}(6\,y-19)^2=\frac{481}{18}$$

$$\frac{1}{3}\left(3\,x^2-17\,x+3\,y^2-19\,y-26\right)=0$$

Equazione della circonferenza

$$3x^2+3y^2-17x-19y-26=0$$

⁎ Metodo algebrico ⁎

Equazione generica della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

Sostituzione delle coordinate dei 3 punti nell'equazione generica

$$P_1(-2;5) \rightarrow (-2)^2 + (5)^2 + a(-2) + b(5) + c = 0$$

$$P_2(1;8) \rightarrow (1)^2 + (8)^2 + a(1) + b(8) + c = 0$$

$$P_3(3;-2) \rightarrow (-2)^2 + (3)^2 + a(3) + b(-2) + c = 0$$

Sistema risultante nelle incognite *a, b, c*

$$\begin{pmatrix} -2\,a + 5\,b + c = -29 \\ a + 8\,b + c = -65 \\ 3\,a - 2\,b + c = -13 \end{pmatrix}$$

Si esplicita una delle equazioni rispetto alla variabile c e si sostituisce nelle altre

$$\begin{pmatrix} c = 2\,a - 5\,b - 29 \\ (2\,a - 5\,b - 29) + a + 8\,b = -65 \\ (2\,a - 5\,b - 29) + 3\,a - 2\,b = -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c = 2\,a - 5\,b - 29 \\ 3\,a + 3\,b - 29 = -65 \\ 5\,a - 7\,b - 29 = -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c = 2\,a - 5\,b - 29 \\ 3\,a + 3\,b = -36 \\ 5\,a - 7\,b = 16 \end{pmatrix}$$